Un peu de théorie sur le jeu "Lights Out", que l'on nomme aussi "All lights".

Un de mes élève a programmé ce jeu en 2010. Je l'ai développé ensuite. Il est disponible sous :
https://www.juggling.ch/gisin/bgweb/aprod2010/JeuAmpoules/Ampoules BG_1.html
° "**Ctrl+Shift+Alt+clique**" sur une ampoule ne chage que l'état de l'ampoule.

Le jeu d'origine a pour but d'éteindre toutes les ampoules.
La version référencée ci-dessus a pour but d'allumer toutes les ampoules, ce qui est équivalent.

Quelques références :
° https://fr.wikipedia.org/wiki/Lights Out (jeu)
° https://en.wikipedia.org/wiki/Lights_Out_(game) la page wikipedia angalise sur ce jeu
° https://www.geogebra.org/m/fy3pacbm All Lights and Lights Out (pdf)
C'est un long article sur la théorie de ce jeu.
° https://doi.org/10.3929/ethz-b-000483037
Un Article plus complet et plus mathématique.

Quelques autres références que j'ai notées au passage, moins intéressantes à mon avis :
Strategy for solving "Lights Out" puzzle.
Réponse à une question sur stackexchange.com
LightsOut Solution using Linear Algebra/
Un article sur xarg.org expliquant comment résoudre ce jeu en résolvant un système d'équations.
Un autre lien que j'ai trouvé
The Original Lights Out! Webpage
Lights Out (Games with solutions)
D'autres ressources sur ce jeu.

Voici des mathématiques permettant de résoudre le jeu : Lights Out.
Je montre également que partant de toutes les ampoules dans le même état, il y a toujours une solution pour obtenir toutes les ampoules dans l'état opposé.
Trois remarques :

1. L'ordre des cliques sur les ampoules n'a pas d'importance.
2. Dans une solution optimale, il ne faut jamais cliquer plusieurs fois sur une ampoule.
3. La connaissance des ampoules à cliquer de la première ligne suffit pour trouver une solution.
   Ceci se voit facilement lorsque l'on joue au jeux, car une fois les cliques sur la première ligne effectués, il n'y a qu'une seule suite de clique sur la deuxième ligne pour allumer les ampoules de la première, puis une seule suite sur la troisième ligne, etc.
   Ceci se verra aussi facilement lors de l'établissement de matrice de résolution du jeu.

Dans un premier temps, étudions le jeu avec toutes les ampoules éteintes au départ.
On peut établir la fonction suivante : *liste des ampoules allumées en fonction de la liste des ampoules cliquées.*
Les listes seront en fait des vecteurs de nombres dans $\mathbb{Z}_2$.
Dans $\mathbb{Z}_2$, il n'y a que les deux nombres 0 et 1, avec $1 + 1 = 0$, donc $1 = -1$, donc la soustraction est équivalent à l'addition $a - b = a + b$.

Notons $\vec{v}$ le vecteurs des cases cliquées, $\vec{w}$ le vecteur des états des lumières après les cliques et

$\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ ... \\ 0 \end{pmatrix}$ le vecteur des états initiaux des ampoules et $\vec{1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ ... \\ 1 \end{pmatrix}$ le vecteur ne contenant que des 1.

La dimension de chaque vecteurs est de $m * n$, où
m = nombre de lignes
n = nombre de colonnes.

Voici la manière de numéroter les cases :

1	2	3	...	n
n+1	n+2	n+3	...	2*n
2*n+1	2*n+2	2*n+3	...	3*n
...				
(m-1)*n+1	(m-1)*n+2	(m-1)*n+3	...	m*n

Cas 3 x 3 :

1	2	3
4	5	6
7	8	9

La correspondance entre les cliques et les états finaux se calcule par produit matriciel et addition de vecteurs.

$$\vec{w} = \boldsymbol{A} \cdot \vec{v} + \vec{b}$$

La correspondance est linéaire dans le cas où $\vec{b} = \vec{0}$.

Voici des matrices de correspondances :

Matrice $\boldsymbol{A}$ dans le cas de lignes x colonnes = 3 x 3

```
 1 : 1 1 0 1 0 0 0 0 0
 2 : 1 1 1 0 1 0 0 0 0
 3 : 0 1 1 0 0 1 0 0 0
 4 : 1 0 0 1 1 0 1 0 0
 5 : 0 1 0 1 1 1 0 1 0
 6 : 0 0 1 0 1 1 0 0 1
 7 : 0 0 0 1 0 0 1 1 0
 8 : 0 0 0 0 1 0 1 1 1
 9 : 0 0 0 0 0 1 0 1 1
```

Matrice $\boldsymbol{A}$ dans le cas de lignes x colonnes = 4 x 4

```
 1 : 1 1 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
 2 : 1 1 1 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
 3 : 0 1 1 1 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0
 4 : 0 0 1 1 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0
 5 : 1 0 0 0 1 1 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0
 6 : 0 1 0 0 1 1 1 0 0 1 0 0 0 0 0 0
 7 : 0 0 1 0 0 1 1 1 0 0 1 0 0 0 0 0
 8 : 0 0 0 1 0 0 1 1 0 0 0 1 0 0 0 0
 9 : 0 0 0 0 1 0 0 0 1 1 0 0 1 0 0 0
10 : 0 0 0 0 0 1 0 0 1 1 1 0 0 1 0 0
11 : 0 0 0 0 0 0 1 0 0 1 1 1 0 0 1 0
12 : 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 1 1 0 0 0 1
13 : 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 1 1 0 0
14 : 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 1 1 1 0
15 : 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 1 1 1
16 : 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 1 1
```

Matrice $\boldsymbol{A}$ dans le cas de lignes x colonnes = 5 x 5

```
    ( 1 0 1 0 1 1 0 1 0 1 0 0 0 0 0 1 0 1 0 1 1 0 1 0 1 == colonnes lin. dépendentes )
 1 : 1 1 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
 2 : 1 1 1 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
 3 : 0 1 1 1 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
 4 : 0 0 1 1 1 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
 5 : 0 0 0 1 1 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
 6 : 1 0 0 0 0 1 1 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
 7 : 0 1 0 0 0 1 1 1 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
 8 : 0 0 1 0 0 0 1 1 1 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
 9 : 0 0 0 1 0 0 0 1 1 1 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
10 : 0 0 0 0 1 0 0 0 1 1 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
11 : 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 1 1 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0
12 : 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 1 1 1 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0
13 : 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 1 1 1 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0
14 : 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 1 1 1 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0
15 : 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 1 1 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0
16 : 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 1 1 0 0 0 1 0 0 0 0
17 : 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 1 1 1 0 0 0 1 0 0 0
18 : 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 1 1 1 0 0 0 1 0 0
19 : 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 1 1 1 0 0 0 1 0
20 : 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 1 1 0 0 0 0 1
21 : 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 1 1 0 0 0
22 : 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 1 1 1 0 0
23 : 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 1 1 1 0
24 : 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 1 1 1
25 : 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 1 1
```

On voit qu'il y a :
des 1 dans la diagonale, ce qui signifie : "cliquer sur une ampoule change son état".
des 1 juste à droite de la diagonale, sauf pour les cases correspondant au bord droit
des 1 juste à gauche de la diagonale, sauf pour les cases correspondant au bord gauche
des 1, n case à gauche de la diagonale, sauf pour les cases correspondant au bord haut
des 1, n case à droite de la diagonale, sauf pour les cases correspondant au bord bas
des 0 ailleurs.

La matrice est symétrique, car un '1' en ligne i et colonne j signifie :
"Cliquer sur la $j^{ème}$ ampoule allume l'ampoule numéro i ".
Dans ce cas, "Cliquer sur la $i^{ème}$ ampoule allume l'ampoule numéro j ".
Donc il y a aussi un '1' en ligne j et colonne i . Donc $a_{ij} = a_{ji}$.

Montrons qu'il y a toujours au moins une solution en partant des ampoules éteintes.

J'ai testé numériquement cette affirmation sur toutes les configurations allant de 1x1, 1x2, 1x3, ..., jusqu'à 200x200, mais cela n'est pas une preuve.
Dans le cas où il y a plusieurs solutions, certaines configurations de départ ne permettent pas d'allumer toutes les ampoules.

La matrice A est une matrice carrée de dimension : m · n où
m = nombre de lignes d'ampoules
n = nombre de colonnes d'ampoules.

- Si la matrice A est inversible, il y a toujours exactement une unique solution, quelle que soit la configuration initiale.
- Sinon, les lignes de la matrice sont *linéairement dépendantes*.
  Vu que les coefficients ne peuvent être que 0 ou 1, cela signifie que la somme de certaines lignes de la matrice donne le vecteur zéro.
- Il y a une solution si et seulement si la somme des termes de droite correspondants aux lignes mentionnées ci-dessus donne 0.
  Cela revient à dire qu'il y a un nombre paire de lignes qui sont additionnées. (car 1+1=0)
- Vu que la matrice est symétrique, additionner des lignes est équivalent à additionner les colonnes correspondantes.
- Additionner des colonnes correspond à fixer à 1 les valeurs des v_i qui multiplient ces colonnes.
  Cela correspond à cliquer sur l'ampoule correspondante à v_i .
- Toutes ces remarques pour justifier qu'**il y a une solution si et seulement si il n'est pas possible qu'un nombre impaire de cliques sur des ampoules, initialement toutes éteintes, redonne que des ampoules toutes éteintes.**

Le problème revient donc à montrer qu'il n'est pas possible de cliquer sur un nombre impair d'ampoules pour obtenir que des ampoules éteintes.
Formulation équivalente, par sa contraposée :
Le problème revient à montrer que, partant d'ampoules toutes éteintes,
si en faisant un certain nombre de cliques sur des ampoules elles sont de nouveau toutes éteintes,
alors il y a eu un nombre pair de cliques.
Mathématiquement cela s'écrit ainsi : $\vec{0} = \boldsymbol{A} \cdot \vec{v} + \vec{0}$
Le « $+ \vec{0}$ » est là juste pour indiquer que l'on part avec toutes les ampoules éteintes.
Le « $\vec{0}$ » à gauche de l'égalité signifie que toutes les ampoules sont éteintes à la fin.
« $\vec{v}$ » représente la liste des ampoules cliquées.
À montrer qu'il y a un nombre pair de 1 dans le vecteur $\vec{v}$.
On sait que $\vec{0} = \boldsymbol{A} \cdot \vec{v}$. Multiplions à gauche par le vecteur $\vec{v}$ transposé. Cela donne : $0 = \vec{v}^t \cdot \boldsymbol{A} \cdot \vec{v}$.

Notons Ω l'ensemble des indices j tels que $v_j = 1$.
On a : $0 = \vec{v}^t \cdot \boldsymbol{A} \cdot \vec{v} = \sum_{i,\, j \in \Omega} a_{i,j} = \sum_{i \in \Omega} a_{i,i} + 2 \cdot \sum_{i < j \in \Omega} a_{i,j} = \sum_{i \in \Omega} a_{i,i} = \sum_{i \in \Omega} 1 =$ Cardinalité de Ω modulo 2 .

La première égalité vient du fait que $\vec{0} = \boldsymbol{A} \cdot \vec{v}$.
La 2ème : écrit explicitement les produits matriciels et utilisent la définition de l'ensemble Ω.
La 3ème : décompose la somme en utilisant le fait que la matrice $\boldsymbol{A}$ est symétrique ($a_{ij} = a_{ji}$).
La 4ème : on travail dans $\mathbb{Z}_2$, donc $2 = 1 + 1 = 0$.
La 5ème : la diagonale de la matrice $\boldsymbol{A}$ est composée que de 1, car cliquer sur une ampoule l'allume.
La 6ème : on travail dans $\mathbb{Z}_2$, donc "modulo 2".
La cardinalité de Ω est le nombre de $v_j = 1$, qui représente le nombre de cliques.
On vient de voir que ce nombre égale 0 dans $\mathbb{Z}_2$, cela signifie que ce nombre est pair.
Ceci démontre qu'en partant d'ampoules éteintes, si en faisant un certain nombre de cliques sur des ampoules, elles sont de nouveau toutes éteintes, alors il y a un nombre pair de cliques.
On a vu que cela est équivalent à dire qu'il y a au moins une solution. CQFD

Ce qui précède est très abstrait. Donnons une interprétation plus concrète de la démonstration.
L'argument qui précède est équivalent à ne considérer l'état « allumé - éteint » que des ampoules sur lesquelles on a cliqué.
Il faut remarquer que *la parité du nombre de cliques est égale à la parité du nombre d'ampoules allumées, parmi les ampoules cliquées*.

Si cela est fait, alors un nombre impair de cliques ne peut pas générer 0 ampoules éteintes, car 0 est pair.

Justifions la remarque, montrons que :
la parité du nombre de cliques et la parité du nombre « d'ampoules cliquées allumées » sont les mêmes.

Au premier clique, on a un clique et une ampoule cliquée qui est allumée.
La parité du nombre de cliques et la parité du nombre *« d'ampoules cliquées allumées »* sont les mêmes.
Lors d'un clique suivant, il y a deux possibilités :
1. Il y a un nombre pair (0, 2 ou 4) d'ampoules cliquées voisines de l'ampoule sur laquelle on clique.
   Vu qu'il y a eu un nombre pair d'ampoules cliquées voisines, l'ampoule en question passe de « éteinte » à « allumée » et toutes les ampoules cliquées voisines changent leur état, donc il y a un nombre impair d'ampoules cliquées qui changent d'état, donc la parité du nombre *« d'ampoules cliquées allumées »* change.
   On a aussi un changement de parité du nombre de cliques, donc ces deux parités restent les mêmes.
2. Il y a un nombre impair (1 ou 3) d'ampoules cliquées voisines de l'ampoule sur laquelle on clique.
   Vu qu'il y a eu un nombre impair d'ampoules cliquées voisines, l'ampoule en question passe de « allumée » à « éteinte » et toutes les ampoules cliquées voisines changent leur état. L'ampoule cliquée entre dans la liste des ampoules sur lesquelles on a cliqué, mais elle est éteinte, donc elle ne change pas le nombre *« d'ampoules cliquées allumées »*. Donc il y a un nombre impair d'ampoules cliquées qui changent d'état, donc la parité du nombre *« d'ampoules cliquées allumées »* change.
   On a aussi un changement de parité du nombre de cliques, donc ces deux parités restent les mêmes.

Conséquence, **à chaque clique sur une ampoule,**
la parité du nombre de cliques et la parité du nombre *« d'ampoules cliquées allumées »* restent les mêmes.

Juste par curiosité traitons quelques cas particulier.

Cas de une ligne d'ampoules.
m = 1, n = nombre de colonnes.
Même dans ce cas, la matrice A n'est pas toujours de rang maximale, elle est donc parois non inversible.
Montrons les solutions dans ce cas.

- Si n= un multiple de 3, cliquer sur la $2^{ème}$ ampoule, puis la $(2+3)^{ème}$, puis la $(2+6)^{ème}$, puis toutes les 3 ampoules. On finira par cliquer sur l'avant-dernière ampoule.
  La matrice M est inversible dans ce cas, vu qu'il n'y a qu'une seule solution.
- Si n= 1+un multiple de 3, cliquer sur la $1^{ère}$ ampoule, puis la $(1+3)^{ème}$, puis la $(1+6)^{ème}$, puis toutes les 3 ampoules. On finira par cliquer sur la $(1+3*k)^{ème}$ ampoule, soit la dernière.
  La matrice M est inversible dans ce cas, vu qu'il n'y a qu'une seule solution.
- Si n= 2+un multiple de 3, il y a deux solutions. La première est :
  cliquer sur la $1^{ère}$ ampoule, puis la $(1+3)^{ème}$, puis la $(1+6)^{ème}$, puis toutes les 3 ampoules. On finira par cliquer sur la $(1+3*k)^{ème}$ ampoule, soit l'avant dernière.
  La deuxième solution est :
  cliquer sur la $2^{ème}$ ampoule, puis la $(2+3)^{ème}$, puis la $(2+6)^{ème}$, puis toutes les 3 ampoules. On finira par cliquer sur la $(2+3*k)^{ème}$ ampoule, soit la dernière.
  La matrice M n'est pas inversible, vu qu'il existe plus d'une solution (2 solutions).

Cas de 2 colonnes d'ampoules et m lignes d'ampoules.
m = nombre de lignes, n = 2 = nombre de colonnes.

Il y a 4 cas à traiter :
1. (4 m +0) x 2, ne pas cliquer sur la première ligne, ni sur la dernière ligne, le reste est automatique.
2. (4 m +1) x 2, cliquer sur une des deux ampoules de la première ligne, le reste est automatique.
3. (4 m +2) x 2, cliquer sur les deux ampoules de la première ligne, le reste est automatique.
4. (4 m +3) x 2, cliquer comme on veut sur les deux ampoules de la première ligne, le reste est automatique.

Même pour un cas aussi simple de deux colonnes, il faut considérer 4 cas !

Cas de 3 colonnes d'ampoules et m lignes d'ampoules.
m = nombre de lignes, n = 3 = nombre de colonnes.
Je n'indique que les cliques sur la première ligne, le reste est automatique.
Il y a 6 cas à traiter :
1. (6 m +0) x 3, ne cliquer sur aucune ampoule.
2. (6 m +1) x 3, cliquer sur l'ampoule du milieu.
3. (6 m +2) x 3, cliquer sur l'ampoule de gauche ou celle de droite. L'ampoule du milieu est optionnelle.
4. (6 m +3) x 3, cliquer sur l'ampoule de gauche et celle de droite.
5. (6 m +4) x 3, cliquer sur les 3 ampoules.
6. (6 m +5) x 3, cliquer sur n'importe quelles ampoules, il y a 8 solutions.

Cas de 4 colonnes d'ampoules et m lignes d'ampoules.
m = nombre de lignes, n = 4 = nombre de colonnes.
Je n'indique que les cliques sur la première ligne, le reste est automatique.
Il y a 5 cas à traiter :
1. (5 m +0) x 4, ne cliquer sur aucune ampoule.
2. (5 m +1) x 4, cliquer sur l'ampoule de gauche et celle de droite.
3. (5 m +2) x 4, cliquer sur les 2 ampoules du milieu.
4. (5 m +3) x 4, cliquer sur toutes les ampoules.
5. (5 m +4) x 4, cliquer sur n'importe quelles ampoules, il y a 16 solutions.

Pour le cas de 5 colonnes, il faut traiter 24 cas différents !

Solutions que j’ai notées lorsque je ne connaissais pas la théorie.

On peut introduire les solutions dans les champs de mémorisation, exécuter les cliques correspondants.

Solution pour 2 ampoules, cliquer sur toutes les ampoules : A1A2B1B2

Solution pour 3 ampoules, A1C1 + suite logique (=>A1C1B2A3C3)

Solution pour 4 ampoules, n'importe quel départ sur la première ligne + suite logique

Solution pour 5 ampoules, A1B1 ou B1C1 ou A1C1D1 ou D1E1 + suite logique

B1C1D1 ou A1C1E1 ou A1B1D1E1 + suite logique pour tout éteindre => tout éteint à la fin

A4A5B3C2C3C5D1D5E1E3E4 = allume le centre uniquement

Solution pour 6 ampoules, A1C1D1F1 + suite logique

Solution pour 7 ampoules, A1B1D1F1G1 + suite logique

Solution pour 8 ampoules, A1B1G1H1 + suite logique

Solution pour 9 ampoules, il y a 256 solutions ! Un départ sur deux + suite logique.

Nombre de solutions en fonction du nombre de lignes et nombre de colonnes d'ampoules

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	1	2	1	1	2	1	1	2	1	1	2	1	1	2	1	1	2	1	1	2
2	2	1	4	1	2	1	4	1	2	1	4	1	2	1	4	1	2	1	4	1
3	1	4	1	1	8	1	1	4	1	1	8	1	1	4	1	1	8	1	1	4
4	1	1	1	16	1	1	1	1	16	1	1	1	1	16	1	1	1	1	16	1
5	2	2	8	1	4	1	16	2	2	1	16	1	2	2	16	1	4	1	8	2
6	1	1	1	1	1	1	1	64	1	1	1	1	1	1	1	1	64	1	1	1
7	1	4	1	1	16	1	1	4	1	1	128	1	1	4	1	1	16	1	1	4
8	2	1	4	1	2	64	4	1	2	1	4	1	128	1	4	1	2	1	4	64
9	1	2	1	16	2	1	1	2	256	1	2	1	1	32	1	1	2	1	256	2
10	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
11	2	4	8	1	16	1	128	4	2	1	64	1	2	4	256	1	16	1	8	4
12	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
13	1	2	1	1	2	1	1	128	1	1	2	1	1	2	1	1	8192	1	1	2
14	2	1	4	16	2	1	4	1	32	1	4	1	2	16	4	256	2	1	64	1
15	1	4	1	1	16	1	1	4	1	1	256	1	1	4	1	1	16	1	1	4
16	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	256	1	256	1	1	1	1
17	2	2	8	1	4	64	16	2	2	1	16	1	8192	2	16	1	4	1	8	128
18	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
19	1	4	1	16	8	1	1	4	256	1	8	1	1	64	1	1	8	1	65536	4
20	2	1	4	1	2	1	4	64	2	1	4	1	2	1	4	1	128	1	4	1

Sur ce même site Web, un tableau montrant le nombre de solutions jusqu'à 120x120 ampoules.
https://www.juggling.ch/gisin/bgweb/aprod2010/LightsOut_theorie_Tableau_120x120.odt
Il donne également le nombre de solutions jusqu'à 200x200.

Sur ce même site Web, un programme en javascript dans une page Web, pour étudier le nombre de solutions :
https://www.juggling.ch/gisin/bgweb/aprod2010/Lights_Out_etude.html

Vu que le nombre de solution est toujours une puissance de 2 et que le nombre peut être grand, on indique dans le tableau suivant l'exposant de 2.
Donc 0 => une solution, 1 => 2 solutions, 2 => 4 solutions, 3 => 8 solutions, 4 => 16 solutions, etc.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
1	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0
2	1	0	2	0	1	0	2	0	1	0	2	0	1	0	2	0	1	0	2	0	1	0	2	0	1	0	2	0	1	0	2	0	1	0	2	0	1	0	2	0
3	0	2	0	0	3	0	0	2	0	0	3	0	0	2	0	0	3	0	0	2	0	0	3	0	0	2	0	0	3	0	0	2	0	0	3	0	0	2	0	0
4	0	0	0	4	0	0	0	0	4	0	0	0	0	4	0	0	0	0	4	0	0	0	0	4	0	0	0	0	4	0	0	0	0	4	0	0	0	0	4	0
5	1	1	3	0	2	0	4	1	1	0	4	0	1	1	4	0	2	0	3	1	1	0	5	0	1	1	3	0	2	0	4	1	1	0	4	0	1	1	4	0
6	0	0	0	0	0	0	0	6	0	0	0	0	0	0	0	0	6	0	0	0	0	0	0	0	0	6	0	0	0	0	0	0	0	0	6	0	0	0	0	0
7	0	2	0	0	4	0	0	2	0	0	7	0	0	2	0	0	4	0	0	2	0	0	7	0	0	2	0	0	4	0	0	2	0	0	7	0	0	2	0	0
8	1	0	2	0	1	6	2	0	1	0	2	0	7	0	2	0	1	0	2	6	1	0	2	0	1	0	8	0	1	0	2	0	1	6	2	0	1	0	2	0
9	0	1	0	4	1	0	0	1	8	0	1	0	0	5	0	0	1	0	8	1	0	0	1	4	0	1	0	0	9	0	0	1	0	4	1	0	0	1	8	0
10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
11	1	2	3	0	4	0	7	2	1	0	6	0	1	2	8	0	4	0	3	2	1	0	10	0	1	2	3	0	4	0	8	2	1	0	6	0	1	2	7	0
12	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
13	0	1	0	0	1	0	0	7	0	0	1	0	0	1	0	0	13	0	0	1	0	0	1	0	0	7	0	0	1	0	0	1	0	0	13	0	0	1	0	0
14	1	0	2	4	1	0	2	0	5	0	2	0	1	4	2	8	1	0	6	0	1	0	2	4	1	0	2	0	5	0	2	0	9	4	2	0	1	0	6	0
15	0	2	0	0	4	0	0	2	0	0	8	0	0	2	0	0	4	0	0	2	0	0	15	0	0	2	0	0	4	0	0	2	0	0	8	0	0	2	0	0
16	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	8	0	8	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	8	0	0	0	8	0	0	0	0	0	0	0
17	1	1	3	0	2	6	4	1	1	0	4	0	13	1	4	0	2	0	3	7	1	0	5	0	1	1	15	0	2	0	4	1	1	6	4	0	1	1	4	0
18	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
19	0	2	0	4	3	0	0	2	8	0	3	0	0	6	0	0	3	0	16	2	0	0	3	4	0	2	0	0	11	0	0	2	0	4	3	0	0	2	16	0
20	1	0	2	0	1	0	2	6	1	0	2	0	1	0	2	0	7	0	2	0	1	0	2	0	1	6	2	0	1	0	2	0	1	0	8	0	1	0	2	0
21	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	10	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0
22	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
23	1	2	3	0	5	0	7	2	1	0	10	0	1	2	15	0	5	0	3	2	1	0	14	0	1	2	3	0	5	0	16	2	1	0	10	0	1	2	7	0
24	0	0	0	4	0	0	0	0	4	0	0	0	0	4	0	0	0	0	4	0	0	0	0	4	0	0	0	0	4	0	0	0	0	4	0	0	0	0	4	0
25	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0
26	1	0	2	0	1	6	2	0	1	0	2	0	7	0	2	0	1	0	2	6	1	0	2	0	1	0	8	0	1	0	2	0	1	6	2	0	1	0	2	0
27	0	2	0	0	3	0	0	8	0	0	3	0	0	2	0	0	15	0	0	2	0	0	3	0	0	8	0	0	3	0	0	2	0	0	27	0	0	2	0	0
28	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
29	1	1	3	4	2	0	4	1	9	0	4	0	1	5	4	8	2	0	11	1	1	0	5	4	1	1	3	0	10	0	4	1	17	4	4	0	1	1	12	0
30	0	0	0	0	0	0	0	0	0	10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	10	0	0	0	0	0	0	0	0	20	0	10	0	0	0	0	0	0	0	0
31	0	2	0	0	4	0	0	2	0	0	8	0	0	2	0	0	4	0	0	2	0	0	16	0	0	2	0	0	4	0	0	2	0	0	8	0	0	2	0	0
32	1	0	2	0	1	0	2	0	1	0	2	0	1	0	2	0	1	0	2	0	1	0	2	0	1	0	2	0	1	10	2	20	1	0	2	0	1	0	2	0
33	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	9	0	8	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	17	0	0	1	16	0	1	0	0	1	0	0
34	0	0	0	4	0	0	0	6	4	0	0	0	0	4	0	0	6	0	4	0	0	0	0	4	0	6	0	0	4	0	0	0	0	4	6	0	0	0	4	0
35	1	2	3	0	4	6	7	2	1	0	6	0	13	2	8	0	4	0	3	8	1	0	10	0	1	2	27	0	4	0	8	2	1	6	6	0	1	2	7	0
36	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
37	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0
38	1	0	2	0	1	0	2	0	1	0	2	0	1	0	2	0	1	0	2	0	1	0	2	0	1	0	2	0	1	0	2	0	1	0	2	0	1	0	2	0
39	0	2	0	4	4	0	0	2	8	0	7	0	0	6	0	0	4	0	16	2	0	0	7	4	0	2	0	0	12	0	0	2	0	4	7	0	0	2	32	0
40	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Vu que le nombre de solution est toujours une puissance de 2 et que le nombre peut être grand, on indique dans le tableau suivant l'exposant de 2.
Donc 0 => une solution, 1 => 2 solutions, 2 => 4 solutions, 3 => 8 solutions, 4 => 16 solutions, etc.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
1	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0
2	1	0	2	0	1	0	2	0	1	0	2	0	1	0	2	0	1	0	2	0	1	0	2	0	1	0	2	0	1	0	2	0	1	0	2	0	1	0	2	0
3	0	2	0	0	3	0	0	2	0	0	3	0	0	2	0	0	3	0	0	2	0	0	3	0	0	2	0	0	3	0	0	2	0	0	3	0	0	2	0	0
4	0	0	0	4	0	0	0	0	4	0	0	0	0	4	0	0	0	0	4	0	0	0	0	4	0	0	0	0	4	0	0	0	0	4	0	0	0	0	4	0
5	1	1	3	0	2	0	4	1	1	0	4	0	1	1	4	0	2	0	3	1	1	0	5	0	1	1	3	0	2	0	4	1	1	0	4	0	1	1	4	0
6	0	0	0	0	0	0	0	6	0	0	0	0	0	0	0	0	6	0	0	0	0	0	0	0	0	6	0	0	0	0	0	0	0	0	6	0	0	0	0	0
7	0	2	0	0	4	0	0	2	0	0	7	0	0	2	0	0	4	0	0	2	0	0	7	0	0	2	0	0	4	0	0	2	0	0	7	0	0	2	0	0
8	1	0	2	0	1	6	2	0	1	0	2	0	7	0	2	0	1	0	2	6	1	0	2	0	1	0	8	0	1	0	2	0	1	6	2	0	1	0	2	0
9	0	1	0	4	1	0	0	1	8	0	1	0	0	5	0	0	1	0	8	1	0	0	1	4	0	1	0	0	9	0	0	1	0	4	1	0	0	1	8	0
10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
11	1	2	3	0	4	0	7	2	1	0	6	0	1	2	8	0	4	0	3	2	1	0	10	0	1	2	3	0	4	0	8	2	1	0	6	0	1	2	7	0
12	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
13	0	1	0	0	1	0	0	7	0	0	1	0	0	1	0	0	13	0	0	1	0	0	1	0	0	7	0	0	1	0	0	1	0	0	13	0	0	1	0	0
14	1	0	2	4	1	0	2	0	5	0	2	0	1	4	2	8	1	0	6	0	1	0	2	4	1	0	2	0	5	0	2	0	9	4	2	0	1	0	6	0
15	0	2	0	0	4	0	0	2	0	0	8	0	0	2	0	0	4	0	0	2	0	0	15	0	0	2	0	0	4	0	0	2	0	0	8	0	0	2	0	0
16	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	8	0	8	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	8	0	0	0	8	0	0	0	0	0	0	0
17	1	1	3	0	2	6	4	1	1	0	4	0	13	1	4	0	2	0	3	7	1	0	5	0	1	1	15	0	2	0	4	1	1	6	4	0	1	1	4	0
18	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
19	0	2	0	4	3	0	0	2	8	0	3	0	0	6	0	0	3	0	16	2	0	0	3	4	0	2	0	0	11	0	0	2	0	4	3	0	0	2	16	0
20	1	0	2	0	1	0	2	6	1	0	2	0	1	0	2	0	7	0	2	0	1	0	2	0	1	6	2	0	1	0	2	0	1	0	8	0	1	0	2	0
21	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	10	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0
22	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
23	1	2	3	0	5	0	7	2	1	0	10	0	1	2	15	0	5	0	3	2	1	0	14	0	1	2	3	0	5	0	16	2	1	0	10	0	1	2	7	0
24	0	0	0	4	0	0	0	0	4	0	0	0	0	4	0	0	0	0	4	0	0	0	0	4	0	0	0	0	4	0	0	0	0	4	0	0	0	0	4	0
25	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0
26	1	0	2	0	1	6	2	0	1	0	2	0	7	0	2	0	1	0	2	6	1	0	2	0	1	0	8	0	1	0	2	0	1	6	2	0	1	0	2	0
27	0	2	0	0	3	0	0	8	0	0	3	0	0	2	0	0	15	0	0	2	0	0	3	0	0	8	0	0	3	0	0	2	0	0	27	0	0	2	0	0
28	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
29	1	1	3	4	2	0	4	1	9	0	4	0	1	5	4	8	2	0	11	1	1	0	5	4	1	1	3	0	10	0	4	1	17	4	4	0	1	1	12	0
30	0	0	0	0	0	0	0	0	0	10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	10	0	0	0	0	0	0	0	0	20	0	10	0	0	0	0	0	0	0	0
31	0	2	0	0	4	0	0	2	0	0	8	0	0	2	0	0	4	0	0	2	0	0	16	0	0	2	0	0	4	0	0	2	0	0	8	0	0	2	0	0
32	1	0	2	0	1	0	2	0	1	0	2	0	1	0	2	0	1	0	2	0	1	0	2	0	1	0	2	0	1	10	2	20	1	0	2	0	1	0	2	0
33	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	9	0	8	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	17	0	0	1	16	0	1	0	0	1	0	0
34	0	0	0	4	0	0	0	6	4	0	0	0	0	4	0	0	6	0	4	0	0	0	0	4	0	6	0	0	4	0	0	0	0	4	6	0	0	0	4	0
35	1	2	3	0	4	6	7	2	1	0	6	0	13	2	8	0	4	0	3	8	1	0	10	0	1	2	27	0	4	0	8	2	1	6	6	0	1	2	7	0
36	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
37	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0
38	1	0	2	0	1	0	2	0	1	0	2	0	1	0	2	0	1	0	2	0	1	0	2	0	1	0	2	0	1	0	2	0	1	0	2	0	1	0	2	0
39	0	2	0	4	4	0	0	2	8	0	7	0	0	6	0	0	4	0	16	2	0	0	7	4	0	2	0	0	12	0	0	2	0	4	7	0	0	2	32	0
40	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	1	2	3	4	5	6	7	8	9	20	1	2	3	4	5	6	7	8	9	30	1	2	3	4	5	6	7	8	9	40	1	2	3	4	5	6	7	8	9	50	1	2	3	4	5	6	7	8	9	60	1	2	3	4	5	6	7	8	9	70	1	2	3	4	5	6	7	8	9	80	1	2	3	4	5	6	7	8	9	90	1	2	3	4	5	6	7	8	9	100
1	**0**	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0
2	1	**0**	2	0	1	0	2	0	1	0	2	0	1	0	2	0	1	0	2	0	1	0	2	0	1	0	2	0	1	0	2	0	1	0	2	0	1	0	2	0	1	0	2	0	1	0	2	0	1	0	2	0	1	0	2	0	1	0	2	0	1	0	2	0	1	0	2	0	1	0	2	0	1	0	2	0	1	0	2	0	1	0	2	0	1	0	2	0	1	0	2	0	1	0	2	0	1	0	2	0
3	0	2	**0**	0	3	0	0	2	0	0	3	0	0	2	0	0	3	0	0	2	0	0	3	0	0	2	0	0	3	0	0	2	0	0	3	0	0	2	0	0	3	0	0	2	0	0	3	0	0	2	0	0	3	0	0	2	0	0	3	0	0	2	0	0	3	0	0	2	0	0	3	0	0	2	0	0	3	0	0	2	0	0	3	0	0	2	0	0	3	0	0	2	0	0	3	0	0	2	0	0
4	0	0	0	**4**	0	0	0	0	4	0	0	0	0	4	0	0	0	0	4	0	0	0	0	4	0	0	0	0	4	0	0	0	0	4	0	0	0	0	4	0	0	0	0	4	0	0	0	0	4	0	0	0	0	4	0	0	0	0	4	0	0	0	0	4	0	0	0	0	4	0	0	0	0	4	0	0	0	0	4	0	0	0	0	4	0	0	0	0	4	0	0	0	0	4	0	0	0	0	4	0
5	1	1	3	0	**2**	0	4	1	1	0	4	0	1	1	4	0	2	0	3	1	1	0	5	0	1	1	3	0	2	0	4	1	1	0	4	0	1	1	4	0	2	0	3	1	1	0	5	0	1	1	3	0	2	0	4	1	1	0	4	0	1	1	4	0	2	0	3	1	1	0	5	0	1	1	3	0	2	0	4	1	1	0	4	0	1	1	4	0	2	0	3	1	1	0	5	0	1	1	3	0
6	0	0	0	0	0	**0**	0	6	0	0	0	0	0	0	0	0	6	0	0	0	0	0	0	0	0	6	0	0	0	0	0	0	0	0	6	0	0	0	0	0	0	0	0	6	0	0	0	0	0	0	0	0	6	0	0	0	0	0	0	0	0	6	0	0	0	0	0	0	0	0	6	0	0	0	0	0	0	0	0	6	0	0	0	0	0	0	0	0	6	0	0	0	0	0	0	0	0	6	0	0
7	0	2	0	0	4	0	**0**	2	0	0	7	0	0	2	0	0	4	0	0	2	0	0	7	0	0	2	0	0	4	0	0	2	0	0	7	0	0	2	0	0	4	0	0	2	0	0	7	0	0	2	0	0	4	0	0	2	0	0	7	0	0	2	0	0	4	0	0	2	0	0	7	0	0	2	0	0	4	0	0	2	0	0	7	0	0	2	0	0	4	0	0	2	0	0	7	0	0	2	0	0
8	1	0	2	0	1	6	2	**0**	1	0	2	0	7	0	2	0	1	0	2	6	1	0	2	0	1	0	8	0	1	0	2	0	1	6	2	0	1	0	2	0	7	0	2	0	1	0	2	6	1	0	2	0	1	0	8	0	1	0	2	0	1	6	2	0	1	0	2	0	7	0	2	0	1	0	2	6	1	0	2	0	1	0	8	0	1	0	2	0	1	6	2	0	1	0	2	0	7	0	2	0
9	0	1	0	4	1	0	0	1	**8**	0	1	0	0	5	0	0	1	0	8	1	0	0	1	4	0	1	0	0	9	0	0	1	0	4	1	0	0	1	8	0	1	0	0	5	0	0	1	0	8	1	0	0	1	4	0	1	0	0	9	0	0	1	0	4	1	0	0	1	8	0	1	0	0	5	0	0	1	0	8	1	0	0	1	4	0	1	0	0	9	0	0	1	0	4	1	0	0	1	8	0
10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	**0**	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
11	1	2	3	0	4	0	7	2	1	0	**6**	0	1	2	8	0	4	0	3	2	1	0	10	0	1	2	3	0	4	0	8	2	1	0	6	0	1	2	7	0	4	0	3	2	1	0	11	0	1	2	3	0	4	0	7	2	1	0	6	0	1	2	8	0	4	0	3	2	1	0	10	0	1	2	3	0	4	0	8	2	1	0	6	0	1	2	7	0	4	0	3	2	1	0	11	0	1	2	3	0
12	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	**0**	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	12	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
13	0	1	0	0	1	0	0	7	0	0	1	0	**0**	1	0	0	13	0	0	1	0	0	1	0	0	7	0	0	1	0	0	1	0	0	13	0	0	1	0	0	1	0	0	7	0	0	1	0	0	1	0	0	13	0	0	1	0	0	1	0	0	7	0	0	1	0	0	1	0	0	13	0	0	1	0	0	1	0	0	7	0	0	1	0	0	1	0	0	13	0	0	1	0	0	1	0	0	7	0	0
14	1	0	2	4	1	0	2	0	5	0	2	0	1	**4**	2	8	1	0	6	0	1	0	2	4	1	0	2	0	5	0	2	0	9	4	2	0	1	0	6	0	1	0	2	4	1	0	2	0	5	8	2	0	1	4	2	0	1	0	6	0	1	0	2	4	1	0	10	0	5	0	2	0	1	4	2	0	1	0	6	0	1	0	2	12	1	0	2	0	5	0	2	0	1	4	2	0	1	0	6	0
15	0	2	0	0	4	0	0	2	0	0	8	0	0	2	**0**	0	4	0	0	2	0	0	15	0	0	2	0	0	4	0	0	2	0	0	8	0	0	2	0	0	4	0	0	2	0	0	15	0	0	2	0	0	4	0	0	2	0	0	8	0	0	2	0	0	4	0	0	2	0	0	15	0	0	2	0	0	4	0	0	2	0	0	8	0	0	2	0	0	4	0	0	2	0	0	15	0	0	2	0	0
16	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	8	0	**8**	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	8	0	0	0	8	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	8	0	0	0	0	0	8	0	0	0	0	0	0	0	0	8	0	0	0	0	0	0	0	8	0	0	0	0	0	0	8	0	0	0	0	0	0	0	0	0	8	0	0	0	0	8	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
17	1	1	3	0	2	6	4	1	1	0	4	0	13	1	4	0	**2**	0	3	7	1	0	5	0	1	1	15	0	2	0	4	1	1	6	4	0	1	1	4	0	14	0	3	1	1	0	5	6	1	1	3	0	2	0	16	1	1	0	4	0	1	7	4	0	2	0	3	1	13	0	5	0	1	1	3	6	2	0	4	1	1	0	16	0	1	1	4	0	2	6	3	1	1	0	5	0	13	1	3	0
18	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	**0**	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
19	0	2	0	4	3	0	0	2	8	0	3	0	0	6	0	0	3	0	**16**	2	0	0	3	4	0	2	0	0	11	0	0	2	0	4	3	0	0	2	16	0	3	0	0	6	0	0	3	0	8	2	0	0	3	4	0	2	0	0	19	0	0	2	0	4	3	0	0	2	8	0	3	0	0	6	0	0	3	0	16	2	0	0	3	4	0	2	0	0	11	0	0	2	0	4	3	0	0	2	16	0
20	1	0	2	0	1	0	2	6	1	0	2	0	1	0	2	0	7	0	2	**0**	1	0	2	0	1	6	2	0	1	0	2	0	1	0	8	0	1	0	2	0	1	0	2	6	1	0	2	0	1	0	2	0	7	0	2	0	1	0	2	0	1	6	2	12	1	0	2	0	1	0	8	0	1	0	2	0	1	0	2	6	1	0	2	0	1	0	2	0	7	0	2	0	1	0	2	0	1	6	2	0
21	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	**0**	0	1	0	0	1	0	0	1	10	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	20	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	11	0	0	1	0	0	1	0	0
22	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	**0**	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
23	1	2	3	0	5	0	7	2	1	0	10	0	1	2	15	0	5	0	3	2	1	0	**14**	0	1	2	3	0	5	0	16	2	1	0	10	0	1	2	7	0	5	0	3	2	1	0	22	0	1	2	3	0	5	0	7	2	1	0	10	0	1	2	16	0	5	0	3	2	1	0	14	0	1	2	3	0	5	0	15	2	1	0	10	0	1	2	7	0	5	0	3	2	1	0	23	0	1	2	3	0
24	0	0	0	4	0	0	0	0	4	0	0	0	0	4	0	0	0	0	4	0	0	0	0	**4**	0	0	0	0	4	0	0	0	0	4	0	0	0	0	4	0	0	0	0	4	0	0	0	0	4	0	0	0	0	4	0	0	0	0	4	0	0	0	0	4	0	0	0	0	4	0	0	0	0	4	0	0	0	0	4	0	0	0	0	4	0	0	0	0	4	0	0	0	0	4	0	0	0	0	4	0
25	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	**0**	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	13	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0
26	1	0	2	0	1	6	2	0	1	0	2	0	7	0	2	0	1	0	2	6	1	0	2	0	1	**0**	8	0	1	0	2	0	1	6	2	0	1	0	2	0	7	0	2	0	1	0	2	6	1	0	2	0	1	0	8	0	1	0	2	0	1	6	2	0	1	0	2	0	7	0	2	0	1	0	2	6	1	0	2	0	1	0	8	0	1	0	2	0	1	6	2	0	1	0	2	0	7	0	2	0
27	0	2	0	0	3	0	0	8	0	0	3	0	0	2	0	0	15	0	0	2	0	0	3	0	0	8	**0**	0	3	0	0	2	0	0	27	0	0	2	0	0	3	0	0	8	0	0	3	0	0	2	0	0	15	0	0	2	0	0	3	0	0	8	0	0	3	0	0	2	0	0	27	0	0	2	0	0	3	0	0	8	0	0	3	0	0	2	0	0	15	0	0	2	0	0	3	0	0	8	0	0
28	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	**0**	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
29	1	1	3	4	2	0	4	1	9	0	4	0	1	5	4	8	2	0	11	1	1	0	5	4	1	1	3	0	**10**	0	4	1	17	4	4	0	1	1	12	0	2	0	3	5	1	0	5	0	9	9	3	0	2	4	4	1	1	0	12	0	1	1	4	4	2	0	19	1	9	0	5	0	1	5	3	0	2	0	12	1	1	0	4	12	1	1	4	0	10	0	3	1	1	4	5	0	1	1	11	0
30	0	0	0	0	0	0	0	0	0	10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	10	0	0	0	0	0	0	0	0	**20**	0	10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	10	0	0	0	0	0	0	20	0	0	0	10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	10	0	0	0	0	20	0	0	0	0	0	10	0	0
31	0	2	0	0	4	0	0	2	0	0	8	0	0	2	0	0	4	0	0	2	0	0	16	0	0	2	0	0	4	0	**0**	2	0	0	8	0	0	2	0	0	4	0	0	2	0	0	31	0	0	2	0	0	4	0	0	2	0	0	8	0	0	2	0	0	4	0	0	2	0	0	16	0	0	2	0	0	4	0	0	2	0	0	8	0	0	2	0	0	4	0	0	2	0	0	31	0	0	2	0	0
32	1	0	2	0	1	0	2	0	1	0	2	0	1	0	2	0	1	0	2	0	1	0	2	0	1	0	2	0	1	10	2	**20**	1	0	2	0	1	0	2	0	1	0	2	0	1	0	2	0	1	0	2	0	1	0	2	0	1	0	2	0	11	0	2	0	21	0	2	0	1	0	2	0	1	0	2	0	1	0	2	0	1	0	2	0	1	0	2	0	1	0	2	10	1	0	2	0	1	20	2	0
33	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	9	0	8	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	17	0	0	1	**16**	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	9	0	0	1	0	0	9	0	0	1	0	0	1	0	0	17	0	0	1	0	0	1	0	16	1	0	0	1	0	0	9	0	0	1	0	0	1	0	0	1	8	0	1	0	0	17	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0
34	0	0	0	4	0	0	0	6	4	0	0	0	0	4	0	0	6	0	4	0	0	0	0	4	0	6	0	0	4	0	0	0	0	**4**	6	0	0	0	4	0	0	0	0	10	0	0	0	0	4	0	0	0	6	4	0	0	0	0	4	0	0	6	0	4	0	0	0	0	4	0	6	0	0	4	0	0	0	0	4	6	0	0	0	4	0	0	0	0	10	0	0	0	0	4	0	0	0	6	4	0
35	1	2	3	0	4	6	7	2	1	0	6	0	13	2	8	0	4	0	3	8	1	0	10	0	1	2	27	0	4	0	8	2	1	6	**6**	0	1	2	7	0	16	0	3	2	1	0	11	6	1	2	3	0	4	0	31	2	1	0	6	0	1	8	8	0	4	0	3	2	13	0	10	0	1	2	3	6	4	0	8	2	1	0	30	0	1	2	7	0	4	6	3	2	1	0	11	0	13	2	3	0
36	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	**0**	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
37	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	**0**	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0
38	1	0	2	0	1	0	2	0	1	0	2	0	1	0	2	0	1	0	2	0	1	0	2	0	1	0	2	0	1	0	2	0	1	0	2	0	1	**0**	2	0	1	0	2	0	1	0	2	0	1	0	2	0	1	0	2	0	1	0	2	0	1	12	2	0	1	0	2	0	1	0	2	0	1	0	2	0	1	0	2	0	1	0	2	0	1	0	2	0	1	0	2	0	1	0	2	0	1	0	2	0
39	0	2	0	4	4	0	0	2	8	0	7	0	0	6	0	0	4	0	16	2	0	0	7	4	0	2	0	0	12	0	0	2	0	4	7	0	0	2	**32**	0	4	0	0	6	0	0	7	0	8	2	0	0	4	4	0	2	0	0	23	0	0	2	0	4	4	0	0	2	8	0	7	0	0	6	0	0	4	0	32	2	0	0	7	4	0	2	0	0	12	0	0	2	0	4	7	0	0	2	16	0
40	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	**0**	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
41	1	1	3	0	2	0	4	7	1	0	4	0	1	1	4	0	14	0	3	1	1	0	5	0	1	7	3	0	2	0	4	1	1	0	16	0	1	1	4	0	**2**	0	3	7	1	0	5	0	1	1	3	0	14	0	4	1	1	0	4	0	1	7	4	12	2	0	3	1	1	0	17	0	1	1	3	0	2	0	4	7	1	0	4	0	1	1	4	0	14	0	3	1	1	0	5	0	1	7	3	0
42	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	**0**	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
43	0	2	0	0	3	0	0	2	0	0	3	0	0	2	0	0	3	0	0	2	0	0	3	0	0	2	0	0	3	10	0	2	0	0	3	0	0	2	0	0	3	0	**0**	2	0	0	3	0	0	2	0	0	3	0	0	2	0	0	3	0	20	2	0	0	3	0	0	2	0	0	3	0	0	2	0	0	3	0	0	2	0	0	3	0	0	2	0	0	3	0	0	12	0	0	3	0	0	2	0	0
44	1	0	2	4	1	6	2	0	5	0	2	0	7	4	2	8	1	0	6	6	1	0	2	4	1	0	8	0	5	0	2	0	9	10	2	0	1	0	6	0	7	0	2	**4**	1	0	2	6	5	8	2	0	1	4	8	0	1	0	6	0	1	6	2	4	1	0	10	0	11	0	2	0	1	4	2	6	1	0	6	0	1	0	8	12	1	0	2	0	5	6	2	0	1	4	2	0	7	0	6	0
45	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	**0**	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0
46	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	**0**	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
47	1	2	3	0	5	0	7	2	1	0	11	0	1	2	15	0	5	0	3	2	1	0	22	0	1	2	3	0	5	0	31	2	1	0	11	0	1	2	7	0	5	0	3	2	1	0	**30**	0	1	2	3	0	5	0	7	2	1	0	11	0	1	2	32	0	5	0	3	2	1	0	22	0	1	2	3	0	5	0	15	2	1	0	11	0	1	2	7	0	5	0	3	2	1	0	46	0	1	2	3	0
48	0	0	0	0	0	0	0	6	0	0	0	0	0	0	0	0	6	0	0	0	0	0	0	0	0	6	0	0	0	0	0	0	0	0	6	0	0	0	0	0	0	0	0	6	0	0	0	**0**	0	0	0	0	6	0	0	0	0	0	0	0	0	6	0	0	0	0	0	0	0	0	6	0	0	0	0	0	0	0	0	6	0	0	0	0	0	0	0	0	6	0	0	0	0	0	0	0	0	6	0	0
49	0	1	0	4	1	0	0	1	8	0	1	0	0	5	0	0	1	0	8	1	0	0	1	4	0	1	0	0	9	0	0	1	0	4	1	0	0	1	8	0	1	0	0	5	0	0	1	0	**8**	1	0	0	1	4	0	1	0	0	9	0	0	1	0	4	1	0	0	1	8	0	1	0	0	5	0	0	1	0	8	1	0	0	1	4	0	1	0	0	9	0	0	1	0	4	1	0	0	1	8	0
50	1	0	2	0	1	0	2	0	1	0	2	0	1	8	2	8	1	0	2	0	1	0	2	0	1	0	2	0	9	0	2	0	9	0	2	0	1	0	2	0	1	0	2	8	1	0	2	0	1	**8**	2	0	1	0	2	0	1	0	10	0	1	0	2	0	1	0	10	0	1	0	2	0	1	8	2	0	1	0	2	0	1	0	2	24	1	0	2	0	9	0	2	0	1	0	2	0	1	0	2	0
51	0	2	0	0	3	0	0	2	0	0	3	0	0	2	0	0	3	0	0	2	0	0	3	0	0	2	0	0	3	0	0	2	0	0	3	0	0	2	0	0	3	0	0	2	0	0	3	0	0	2	**0**	0	3	0	0	2	0	0	3	0	0	14	0	0	3	0	0	2	0	0	3	0	0	2	0	0	3	0	0	2	0	0	3	0	0	2	0	0	3	0	0	2	0	0	3	0	0	2	0	0
52	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	**0**	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
53	1	1	3	0	2	6	4	1	1	0	4	0	13	1	4	0	2	0	3	7	1	0	5	0	1	1	15	0	2	0	4	1	1	6	4	0	1	1	4	0	14	0	3	1	1	0	5	6	1	1	3	0	**2**	0	16	1	1	0	4	0	1	7	4	0	2	0	3	1	13	0	5	0	1	1	3	6	2	0	4	1	1	0	16	0	1	1	4	0	2	6	3	1	1	0	5	0	13	1	3	0
54	0	0	0	4	0	0	0	0	4	0	0	0	0	4	0	0	0	0	4	0	0	0	0	4	0	0	0	0	4	10	0	0	0	4	0	0	0	0	4	0	0	0	0	4	0	0	0	0	4	0	0	0	0	**4**	0	0	0	0	4	0	10	0	0	4	0	0	0	0	4	0	0	0	0	4	0	0	0	0	4	0	0	0	0	4	0	0	0	0	4	0	0	10	0	4	0	0	0	0	4	0
55	0	2	0	0	4	0	0	8	0	0	7	0	0	2	0	0	16	0	0	2	0	0	7	0	0	8	0	0	4	0	0	2	0	0	31	0	0	2	0	0	4	0	0	8	0	0	7	0	0	2	0	0	16	0	**0**	2	0	0	7	0	0	8	0	0	4	0	0	2	0	0	55	0	0	2	0	0	4	0	0	8	0	0	7	0	0	2	0	0	16	0	0	2	0	0	7	0	0	8	0	0
56	1	0	2	0	1	0	2	0	1	0	2	0	1	0	2	0	1	0	2	0	1	0	2	0	1	0	2	0	1	0	2	0	1	0	2	0	1	0	2	0	1	0	2	0	1	0	2	0	1	0	2	0	1	0	2	**0**	1	0	2	0	1	0	2	0	1	0	2	0	1	0	2	0	1	0	2	0	1	0	2	0	1	0	2	0	1	0	2	0	1	0	2	0	1	0	2	0	1	0	2	0
57	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	**0**	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0
58	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	**0**	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
59	1	2	3	4	4	0	7	2	9	0	6	0	1	6	8	8	4	0	19	2	1	0	10	4	1	2	3	0	12	0	8	2	17	4	6	0	1	2	23	0	4	0	3	6	1	0	11	0	9	10	3	0	4	4	7	2	1	0	**22**	0	1	2	8	4	4	0	35	2	9	0	10	0	1	6	3	0	4	0	24	2	1	0	6	12	1	2	7	0	12	0	3	2	1	4	11	0	1	2	19	0
60	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	**0**	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
61	0	1	0	0	1	0	0	1	0	10	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	20	0	1	0	0	1	0	0	1	20	0	11	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	20	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	10	0	1	0	0	1	0	**40**	1	0	0	21	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	10	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	20	0	1	0	0	21	0	0	1	0	0	11	0	0
62	1	0	2	0	1	6	2	6	1	0	2	12	7	0	2	0	7	0	2	6	1	0	2	0	13	6	8	0	1	0	2	0	1	6	8	0	1	12	2	0	7	0	2	6	1	0	2	6	1	0	14	0	7	0	8	0	1	0	2	0	1	**24**	2	36	1	0	2	0	7	0	8	0	1	0	2	6	13	0	2	6	1	0	8	0	1	0	2	0	7	18	2	0	1	0	2	0	7	6	2	0

63	0	2	0	0	4	0	0	2	0	0	8	0	0	2	0	0	4	0	0	2	0	0	16	0	0	2	0	0	4	0	0	2	0	0	8	0	0	2	0	0	4	0	0	2	0	0	32	0	0	2	0	0	4	0	0	2	0	0	8	0	0	2	**0**	0	4	0	0	2	0	0	16	0	0	2	0	0	4	0	0	2	0	0	8	0	0	2	0	0	4	0	0	2	0	0	63	0	0	2	0	0
64	0	0	0	4	0	0	0	0	4	0	0	0	0	4	0	0	0	0	4	12	0	0	0	4	0	0	0	0	4	0	0	0	0	4	0	0	0	0	4	0	12	0	0	4	0	0	0	0	4	0	0	0	0	4	0	0	0	0	4	0	0	36	0	**28**	0	0	0	0	4	0	0	0	0	4	0	0	0	0	4	0	0	0	12	4	0	0	0	0	4	0	0	0	0	4	0	0	0	0	4	0
65	1	1	3	0	2	0	4	1	1	0	4	0	1	1	4	0	2	0	3	1	1	0	5	0	1	1	3	0	2	10	4	21	1	0	4	0	1	1	4	0	2	0	3	1	1	0	5	0	1	1	3	0	2	0	4	1	1	0	4	0	21	1	4	0	**42**	0	3	1	1	0	5	0	1	1	3	0	2	0	4	1	1	0	4	0	1	1	4	0	2	0	3	11	1	0	5	0	1	21	3	0
66	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	**0**	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
67	0	2	0	0	3	0	0	2	0	0	3	0	0	10	0	8	3	0	0	2	0	0	3	0	0	2	0	0	19	0	0	2	16	0	3	0	0	2	0	0	3	0	0	10	0	0	3	0	0	10	0	0	3	0	0	2	0	0	35	0	0	2	0	0	3	0	**32**	2	0	0	3	0	0	10	0	0	3	0	0	2	0	0	3	8	0	2	0	0	19	0	0	2	0	0	3	0	0	2	0	0
68	1	0	2	0	1	0	2	0	1	0	2	0	1	0	2	0	1	0	2	0	1	0	2	0	1	0	2	0	1	0	2	0	1	0	2	0	1	0	2	0	1	0	2	0	1	0	2	0	1	0	2	0	1	0	2	0	1	0	2	0	1	0	2	0	1	0	2	**0**	1	0	2	0	1	0	2	0	1	0	2	0	1	0	2	0	1	0	2	0	1	0	2	0	1	0	2	0	1	0	2	0
69	0	1	0	4	1	0	0	7	8	0	1	0	0	5	0	0	13	0	8	1	0	0	1	4	0	7	0	0	9	0	0	1	0	4	13	0	0	1	8	0	1	0	0	11	0	0	1	0	8	1	0	0	13	4	0	1	0	0	9	0	0	7	0	4	1	0	0	1	**8**	0	13	0	0	5	0	0	1	0	8	7	0	0	1	4	0	1	0	0	21	0	0	1	0	4	1	0	0	7	8	0
70	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	**0**	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
71	1	2	3	0	5	6	7	2	1	0	10	0	13	2	15	0	5	0	3	8	1	0	14	0	1	2	27	0	5	0	16	2	1	6	10	0	1	2	7	0	17	0	3	2	1	0	22	6	1	2	3	0	5	0	55	2	1	0	10	0	1	8	16	0	5	0	3	2	13	0	**14**	0	1	2	3	6	5	0	15	2	1	0	34	0	1	2	7	0	5	6	3	2	1	0	23	0	13	2	3	0
72	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	**0**	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
73	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	**0**	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0
74	1	0	2	4	1	0	2	0	5	0	2	0	1	4	2	8	1	0	6	0	1	0	2	4	1	0	2	0	5	0	2	0	9	4	2	0	1	0	6	0	1	0	2	4	1	0	2	0	5	8	2	0	1	4	2	0	1	0	6	0	1	0	2	4	1	0	10	0	5	0	2	0	1	**4**	2	0	1	0	6	0	1	0	2	12	1	0	2	0	5	0	2	0	1	4	2	0	1	0	6	0
75	0	2	0	0	3	0	0	2	0	0	3	0	0	2	0	0	3	0	0	2	0	0	3	0	0	2	0	0	3	0	0	2	0	0	3	0	0	2	0	0	3	0	0	2	0	0	3	0	0	2	0	0	3	0	0	2	0	0	3	0	0	2	0	0	3	0	0	2	0	0	3	0	0	2	**0**	0	3	0	0	2	0	0	3	0	0	2	0	0	3	0	0	2	0	0	3	0	0	2	0	0
76	0	0	0	0	0	0	0	6	0	0	0	0	0	0	0	0	6	0	0	0	0	0	0	0	0	6	0	0	0	10	0	0	0	0	6	0	0	0	0	0	0	0	0	6	0	0	0	0	0	0	0	0	6	0	0	0	0	0	0	0	10	6	0	0	0	0	0	0	0	0	6	0	0	0	0	**0**	0	0	0	6	0	0	0	0	0	0	0	0	6	0	0	10	0	0	0	0	0	6	0	0
77	1	1	3	0	2	0	4	1	1	0	4	0	1	1	4	0	2	0	3	1	1	0	5	0	1	1	3	0	2	0	4	1	1	0	4	0	1	1	4	0	2	0	3	1	1	0	5	0	1	1	3	0	2	0	4	1	1	0	4	0	1	13	4	0	2	0	3	1	1	0	5	0	1	1	3	0	**2**	0	4	1	1	0	4	0	1	1	4	0	2	0	3	1	1	0	5	0	1	1	3	0
78	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	**0**	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
79	0	2	0	4	4	0	0	2	8	0	8	0	0	6	0	0	4	0	16	2	0	0	15	4	0	2	0	0	12	0	0	2	0	4	8	0	0	2	32	0	4	0	0	6	0	0	15	0	8	2	0	0	4	4	0	2	0	0	24	0	0	2	0	4	4	0	0	2	8	0	15	0	0	6	0	0	4	0	**64**	2	0	0	8	4	0	2	0	0	12	0	0	2	0	4	15	0	0	2	16	0
80	1	0	2	0	1	6	2	0	1	0	2	0	7	0	2	0	1	0	2	6	1	0	2	0	1	0	8	0	1	0	2	0	1	6	2	0	1	0	2	0	7	0	2	0	1	0	2	6	1	0	2	0	1	0	8	0	1	0	2	0	1	6	2	0	1	0	2	0	7	0	2	0	1	0	2	6	1	0	2	**0**	1	0	8	0	1	0	2	0	1	6	2	0	1	0	2	0	7	0	2	0
81	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	**0**	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0
82	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	**0**	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
83	1	2	3	0	4	0	7	8	1	0	6	0	1	2	8	0	16	0	3	2	1	0	10	0	1	8	3	0	4	0	8	2	1	0	30	0	1	2	7	0	4	0	3	8	1	0	11	0	1	2	3	0	16	0	7	2	1	0	6	0	1	8	8	12	4	0	3	2	1	0	34	0	1	2	3	0	4	0	8	8	1	0	**6**	0	1	2	7	0	16	0	3	2	1	0	11	0	1	8	3	0
84	0	0	0	4	0	0	0	0	4	0	0	0	0	12	0	8	0	0	4	0	0	0	0	4	0	0	0	0	12	0	0	0	8	4	0	0	0	0	4	0	0	0	0	12	0	0	0	0	4	24	0	0	0	4	0	0	0	0	12	0	0	0	0	4	0	0	8	0	4	0	0	0	0	12	0	0	0	0	4	0	0	0	0	**12**	0	0	0	0	12	0	0	0	0	4	0	0	0	0	4	0
85	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	**0**	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0
86	1	0	2	0	1	0	2	0	1	0	2	0	1	0	2	0	1	0	2	0	1	0	2	0	1	0	2	0	1	0	2	0	1	0	2	0	1	0	2	0	1	0	2	0	1	0	2	0	1	0	2	0	1	0	2	0	1	0	2	0	1	0	2	0	1	0	2	0	1	0	2	0	1	0	2	0	1	0	2	0	1	0	2	0	1	**0**	2	0	1	0	2	0	1	0	2	0	1	0	2	0
87	0	2	0	0	4	0	0	2	0	0	7	0	0	2	0	0	4	0	0	2	0	0	7	0	0	2	0	0	4	10	0	2	0	0	7	0	0	2	0	0	4	0	0	2	0	0	7	0	0	2	0	0	4	0	0	2	0	0	7	0	20	2	0	0	4	0	0	2	0	0	7	0	0	2	0	0	4	0	0	2	0	0	7	0	0	2	**0**	0	4	0	0	12	0	0	7	0	0	2	0	0
88	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	**0**	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
89	1	1	3	4	2	6	4	1	9	0	4	0	13	5	4	8	2	0	11	7	1	0	5	4	1	1	15	0	10	0	4	1	17	10	4	0	1	1	12	0	14	0	3	5	1	0	5	6	9	9	3	0	2	4	16	1	1	0	12	0	1	7	4	4	2	0	19	1	21	0	5	0	1	5	3	6	2	0	12	1	1	0	16	12	1	1	4	0	**10**	6	3	1	1	4	5	0	13	1	11	0
90	0	0	0	0	0	0	0	6	0	0	0	0	0	0	0	0	6	0	0	0	0	0	0	0	0	6	0	0	0	0	0	0	0	0	6	0	0	0	0	0	0	0	0	6	0	0	0	0	0	0	0	0	6	0	0	0	0	0	0	0	0	18	0	0	0	0	0	0	0	0	6	0	0	0	0	0	0	0	0	6	0	0	0	0	0	0	0	0	6	**0**	0	0	0	0	0	0	0	6	0	0
91	0	2	0	0	3	0	0	2	0	0	3	0	0	2	0	0	3	0	0	2	0	0	3	0	0	2	0	0	3	0	0	2	0	0	3	0	0	2	0	0	3	0	0	2	0	0	3	0	0	2	0	0	3	0	0	2	0	0	3	0	0	2	0	0	3	0	0	2	0	0	3	0	0	2	0	0	3	0	0	2	0	0	3	0	0	2	0	0	3	0	**0**	2	0	0	3	0	0	2	0	0
92	1	0	2	0	1	0	2	0	1	10	2	0	1	0	2	0	1	0	2	0	11	0	2	0	1	0	2	0	1	20	2	10	1	0	2	0	1	0	2	0	1	0	12	0	1	0	2	0	1	0	2	0	1	10	2	0	1	0	2	0	21	0	2	0	11	0	2	0	1	0	2	0	1	0	2	10	1	0	2	0	1	0	2	0	1	0	12	0	1	0	2	**20**	1	0	2	0	1	10	2	0
93	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	**0**	0	1	0	0	1	0	0
94	0	0	0	4	0	0	0	0	4	0	0	0	0	4	0	0	0	0	4	0	0	0	0	4	0	0	0	0	4	0	0	0	0	4	0	0	0	0	4	0	0	0	0	4	0	0	0	0	4	0	0	0	0	4	0	0	0	0	4	0	0	0	0	4	0	0	0	0	4	0	0	0	0	4	0	0	0	0	4	0	0	0	0	4	0	0	0	0	4	0	0	0	0	**4**	0	0	0	0	4	0
95	1	2	3	0	5	0	7	2	1	0	11	0	1	2	15	0	5	0	3	2	1	0	23	0	1	2	3	0	5	0	31	2	1	0	11	0	1	2	7	0	5	0	3	2	1	0	46	0	1	2	3	0	5	0	7	2	1	0	11	0	1	2	63	0	5	0	3	2	1	0	23	0	1	2	3	0	5	0	15	2	1	0	11	0	1	2	7	0	5	0	3	2	1	0	**62**	0	1	2	3	0
96	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	**0**	0	0	0	0
97	0	1	0	0	1	0	0	7	0	0	1	0	0	1	0	0	13	0	0	1	0	0	1	0	0	7	0	0	1	0	0	1	0	0	13	0	0	1	0	0	1	0	0	7	0	0	1	0	0	1	0	0	13	0	0	1	0	0	1	0	0	7	0	0	1	0	0	1	0	0	13	0	0	1	0	0	1	0	0	7	0	0	1	0	0	1	0	0	13	0	0	1	0	0	1	0	**0**	7	0	0
98	1	0	2	0	1	6	2	0	1	0	2	0	7	0	2	0	1	0	2	6	1	0	2	0	1	0	8	0	1	10	2	20	1	6	2	0	1	0	2	0	7	0	2	0	1	0	2	6	1	0	2	0	1	0	8	0	1	0	2	0	11	6	2	0	21	0	2	0	7	0	2	0	1	0	2	6	1	0	2	0	1	0	8	0	1	0	2	0	1	6	2	10	1	0	2	0	7	**20**	2	0
99	0	2	0	4	3	0	0	2	8	0	3	0	0	6	0	0	3	0	16	2	0	0	3	4	0	2	0	0	11	0	0	2	0	4	3	0	0	2	16	0	3	0	0	6	0	0	3	0	8	2	0	0	3	4	0	2	0	0	19	0	0	2	0	4	3	0	0	2	8	0	3	0	0	6	0	0	3	0	16	2	0	0	3	4	0	2	0	0	11	0	0	2	0	4	3	0	0	2	**16**	0
100	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	**0**

Voici la matrice $\boldsymbol{A}$ dans le cas de lignes x colonnes = 3 x 3, pour l'avoir sous les yeux.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1 :	1	1	0	1	0	0	0	0	0
2 :	1	1	1	0	1	0	0	0	0
3 :	0	1	1	0	0	1	0	0	0
4 :	1	0	0	1	1	0	1	0	0
5 :	0	1	0	1	1	1	0	1	0
6 :	0	0	1	0	1	1	0	0	1
7 :	0	0	0	1	0	0	1	1	0
8 :	0	0	0	0	1	0	1	1	1
9 :	0	0	0	0	0	1	0	1	1

Cases :
1 2 3
4 5 6
7 8 9

$\vec{w} + \vec{b} = \boldsymbol{A} \cdot \vec{v}$ (Rappelons que + et - donnent le même résultat dans $\mathbb{Z}_2$)

Le but du jeu est de déterminer le vecteur $\vec{v}$ pour que $\vec{w} = \vec{1}$.
On a donc un système de $m \cdot n$ équations à $m \cdot n$ inconnues.

Mais connaissant les valeurs de v_1 à v_n, les autres se calculent très facilement comme suit :
Ici n = 3

$v_4 = v_2 + v_1 + 1$

$v_5 = v_3 + v_2 + v_1 + 1$

$v_6 = v_3 + v_2 + 1$

$v_7 = v_5 + v_4 + v_1 + 1$

$v_8 = v_6 + v_5 + v_4 + v_2 + 1$

$v_9 = v_6 + v_5 + v_3 + 1$

Cela est similaire pour n'importe quelles valeurs de m et de n.

On peut donc exprimer :
v_4 en fonction de v_1 à v_n, puis
v_5 en fonction de v_1 à v_n, puis
etc.
$v_{m \cdot n}$ en fonction de v_1 à v_n.
Cela crée un système de n équations à n inconnues.
La manière de faire n'est pas linéaire, car il y a les « 1 » qui interviennent à chaque étape.

À la fin, il faudra résoudre un système linéaire de n équations à n inconnues, avec le membre de droite qui dépend de manière assez compliquée des éliminations des variables dans le processus décrit juste ci-dessus.

La matrice correspondant à ce système est pour certaines valeurs de m et de n non inversible. Dans ces cas, il n'est pas évident qu'une solution existe. En fait, si une solution existe, le nombre de solutions existante est toujours une puissance de 2, car en triangulant le système à résoudre par élimination de Gauss, il restera certaines lignes nulles et les variables v_k correspondantes à ces lignes pourront chacune prendre 2 valeurs, soit 0 soit 1.
On a montré précédemment qu'en partant avec toutes les ampoules éteintes, il existe toujours au moins une solution pour toutes les allumer.

Manière de créer la matrice n x n à résoudre.
Le cas 5 x 5 est traité dans l'article : ° https://www.geogebra.org/m/fy3pacbm All Lights and Lights Out (pdf)
Il est conseillé de le lire, il est plus complet que ce que j'écris ici, sauf que je ne comprends pas la partie montrant l'existence d'une solution.
L'article : https://doi.org/10.3929/ethz-b-000483037 est plus complète et plus abstrait.
Voici le cas 4 x 4
On part des vecteurs de la première ligne :
(1, 0, 0, 0, **0**) (0, 1, 0, 0, **0**) (0, 0, 1, 0, **0**) (0, 0, 0, 1, **0**)
(1, 1, 0, 0, 1) (1, 1, 1, 0, 1) (0, 1, 1, 1, 1) (0, 0, 1, 1, 1)
(1, 0, 1, 0, 1) (0, 0, 0, 1, **0**) (1, 0, 0, 0, **0**) (0, 1, 0, 1, 1)
(0, 1, 1, 1, 1) (1, 1, 0, 1, 1) (1, 0, 1, 1, 1) (1, 1, 1, 0, 1)
(0, 0, 0, 0, **0**) (0, 0, 0, 0, **0**) (0, 0, 0, 0, **0**) (0, 0, 0, 0, **0**)
La dernière ligne donne les colonnes de la matrice, elle est donc égale à 0.
Les derniers chiffres, en gras, de la dernière ligne donne le membre de droite de l'équation, qui est donc nul.
On peut cliquer comme on veut sur la première ligne, les cliques sur les lignes suivantes qui allument les ampoules des lignes précédentes donneront une solution.

Le chiffre en gras correspond au membre de droite de l'équation à résoudre : Mat * vec = droite.
Chaque vecteur est obtenu en additionnant : (en se rappelant que 1 + 1 = 0)
le vecteur de dessus,
celui deux lignes au-dessus (lorsqu'il existe),
celui au-dessus à gauche
celui au-dessus à droite
et le vecteur (0, 0, 0, 0, 1).

Les vecteurs de la dernière ligne correspondent aux colonnes de la matrice Mat, sauf le dernier chiffre qui correspond aux composantes du vecteur droite.
vec = (v_1 ; v_2 ; ... ; v_n)

Voici le cas 5 x 5
Le vecteur de la case 4;5, dernier élément est bien 1 et non 0. Il y a une erreur en page 13 de l'article.
On part des vecteurs de la première ligne :
(1, 0, 0, 0, 0, **0**) (0, 1, 0, 0, 0, **0**) (0, 0, 1, 0, 0, **0**) (0, 0, 0, 1, 0, **0**) (0, 0, 0, 0, 1, **0**)
(1, 1, 0, 0, 0, 1) (1, 1, 1, 0, 0, 1) (0, 1, 1, 1, 0, 1) (0, 0, 1, 1, 1, 1) (0, 0, 0, 1, 1, 1)
(1, 0, 1, 0, 0, 1) (0, 0, 0, 1, 0, **0**) (1, 0, 0, 0, 1, **0**) (0, 1, 0, 0, 0, **0**) (0, 0, 1, 0, 1, 1)
(0, 1, 1, 1, 0, 1) (1, 1, 0, 1, 1, 1) (1, 0, 1, 0, 1, **0**) (1, 1, 0, 1, 1, 1) (0, 1, 1, 1, 0, 1)
(0, 0, 0, 0, 1, **0**) (0, 0, 0, 1, 0, 1) (0, 0, 1, 0, 0, 1) (0, 1, 0, 0, 0, 1) (1, 0, 0, 0, 0, **0**)
(0, 1, 1, 0, 1, 1) (1, 1, 1, 0, 0, **0**) (1, 1, 0, 1, 1, **0**) (0, 0, 1, 1, 1, **0**) (1, 0, 1, 1, 0, 1)

Système à résoudre :
$$\begin{pmatrix} \mathbf{0} & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & \mathbf{1} & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & \mathbf{0} & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \mathbf{1} & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & \mathbf{0} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

Voici le cas 6 x 6
On part des vecteurs de la première ligne :
(1, 0, 0, 0, 0, 0, **0**) (0, 1, 0, 0, 0, 0, **0**) (0, 0, 1, 0, 0, 0, **0**) (0, 0, 0, 1, 0, 0, **0**) (0, 0, 0, 0, 1, 0, **0**) (0, 0, 0, 0, 0, 1, **0**)
(1, 1, 0, 0, 0, 0, 1) (1, 1, 1, 0, 0, 0, 1) (0, 1, 1, 1, 0, 0, 1) (0, 0, 1, 1, 1, 0, 1) (0, 0, 0, 1, 1, 1, 1) (0, 0, 0, 0, 1, 1, 1)
(1, 0, 1, 0, 0, 0, 1) (0, 0, 0, 1, 0, 0, **0**) (1, 0, 0, 0, 1, 0, **0**) (0, 1, 0, 0, 0, 1, **0**) (0, 0, 1, 0, 0, 0, **0**) (0, 0, 0, 1, 0, 1, 1)
(0, 1, 1, 1, 0, 0, 1) (1, 1, 0, 1, 1, 0, 1) (1, 0, 1, 0, 1, 1, **0**) (1, 1, 0, 1, 0, 1, **0**) (0, 1, 1, 0, 1, 1, 1) (0, 0, 1, 1, 1, 0, 1)
(0, 0, 0, 0, 1, 0, **0**) (0, 0, 0, 1, 0, 1, 1) (0, 0, 1, 0, 1, 0, **0**) (0, 1, 0, 1, 0, 0, **0**) (1, 0, 1, 0, 0, 0, 1) (0, 1, 0, 0, 0, 0, **0**)
(0, 1, 1, 0, 1, 1, 1) (1, 1, 1, 0, 1, 1, 1) (1, 1, 0, 0, 0, 0, **0**) (0, 0, 0, 0, 1, 1, **0**) (1, 1, 0, 1, 1, 1, 1) (1, 1, 0, 1, 1, 0, 1)
(1, 0, 0, 0, 1, 0, 1) (0, 1, 0, 1, 0, 1, **0**) (0, 0, 0, 0, 1, 0, **0**) (0, 1, 0, 0, 0, 0, **0**) (1, 0, 1, 0, 1, 0, **0**) (0, 1, 0, 0, 0, 1, 1)

Système à résoudre :
$$\begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \mathbf{0} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \mathbf{0} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & \mathbf{1} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

Les vecteurs de la dernière ligne donnent les colonnes de la matrice. Le dernier chiffre, en gras, donne le vecteur à droite de l'égalité.

Notons :

$\vec{v}_i$ le vecteurs (1 x n) représentant les ampoules cliquées de la i[ème] ligne.

Il est tel que les ampoules de la ligne i-1 sont toutes allumées, pour $i \geq 2$

$\vec{w}_i$ le vecteurs (1 x n) représentant l'état des ampoules de la i[ème] ligne après avoir cliqué sur les lignes de 1 à i.

$\vec{v}_0 = \vec{0} = (0, 0, \ldots, 0)$

$\vec{1} = (1, 1, \ldots, 1)$

On ajoute une ligne m+1 d'ampoules. Leur état importe peu, mais il faut qu'à la fin aucun clique ne doive être effectué sur ces ampoules, ou, ce qui revient au même, que les ampoules de la ligne m soient toutes allumées.

On a :

$\vec{w}_i = M \cdot \vec{v}_i + \vec{v}_{i-1}$ i = 1, ..., n

Si on a pas encore cliqué sur la ligne i+1,
les ampoules allumées dépendent des ampoules des deux lignes au-dessus.

$\vec{v}_i = \vec{1} + \vec{w}_{i-1}$ i = 1, ..., m

Il faut cliquer sur les ampoules de la ligne i
pour allumer celles qui sont éteintes dans la ligne i-1

Matrice M dans le cas où n = 6

$$M = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \mathbf{1} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \mathbf{1} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \mathbf{1} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \mathbf{1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

En combinant, on a : $\vec{v}_i = \vec{1} + M \cdot \vec{v}_{i-1} + \vec{v}_{i-2}$, qui représente l'évolution des cliques à faire.

On veut avoir $\vec{w}_m = \vec{1}$, donc $\vec{v}_{m+1} = \vec{0}$, c'est-à-dire aucun clique à faire sur la ligne (fictive) m+1.

On a :

$$\vec{0} = \vec{v}_{m+1} = \vec{1} + M \cdot \vec{v}_m + \vec{v}_{m-1}$$

$$\vec{0} = \vec{1} + M \cdot \left(\vec{1} + M \cdot \vec{v}_{m-1} + \vec{v}_{m-2}\right) + \vec{v}_{m-1}$$

$$\vec{0} = \vec{1} + M \cdot \left(\vec{1} + M \cdot \vec{v}_{m-1} + \vec{v}_{m-2}\right) + \vec{v}_{m-1} = (M+I) \cdot \vec{1} + (M^2+I) \cdot \vec{v}_{m-1} + M \cdot \vec{v}_{m-2}$$

Il faut se rappeler que 1 + 1 = 0. Donc $M^2+I = (M+I) \cdot (M+I)$ i.e. $(M+I)^2 = M^2+I$

$$\vec{v}_2 = \vec{1} + M \cdot \vec{v}_1$$

$$\vec{v}_3 = \vec{1} + M \cdot \vec{v}_2 + \vec{v}_1 = \vec{1} + M \cdot \left(\vec{1} + M \cdot \vec{v}_1\right) + \vec{v}_1$$

$$\vec{v}_3 = (M+I) \cdot \vec{1} + (M^2+I) \cdot \vec{v}_1 = (M+I) \cdot \left(\vec{1} + (M+I) \cdot \vec{v}_1\right)$$

$$\vec{v}_4 = \vec{1} + M \cdot \vec{v}_3 + \vec{v}_2 = \vec{1} + M \cdot \left((M+I) \cdot \vec{1} + (M^2+I) \cdot \vec{v}_1\right) + \vec{1} + M \cdot \vec{v}_1$$

$$\vec{v}_4 = \vec{1} + M \cdot (M+I) \left(\vec{1} + (M+I) \cdot \vec{v}_1\right) + \vec{1} + M \cdot \vec{v}_1$$

$$\vec{v}_4 = M \cdot (M+I) \cdot \vec{1} + M \cdot ((M+I)^2+I) \cdot \vec{v}_1$$

$$\vec{v}_4 = M \cdot (M+I) \cdot \vec{1} + M^3 \cdot \vec{v}_1$$

$$\vec{v}_5 = \vec{1} + M \cdot \vec{v}_4 + \vec{v}_3 = \vec{1} + M \cdot \left(M \cdot (M+I) \cdot \vec{1} + M^3 \cdot \vec{v}_1\right) + (M+I) \cdot \vec{1} + (M^2+I) \cdot \vec{v}_1$$

$$\vec{v}_5 = (M^3+M^2+M) \cdot \vec{1} + (M^4+M^2+I) \cdot \vec{v}_1$$

$$\vec{v}_5 = M \cdot (M^2+M+I) \cdot \vec{1} + (M^4+M^2+I) \cdot \vec{v}_1$$

$$\vec{v}_6 = \vec{1} + M \cdot \vec{v}_5 + \vec{v}_4 = \vec{1} + M \cdot \left(M \cdot (M^2+M+I) \cdot \vec{1} + (M^4+M^2+I) \cdot \vec{v}_1\right) + M \cdot (M+I) \cdot \vec{1} + M^3 \cdot \vec{v}_1$$

$$\vec{v}_6 = (M^4+M^3+M+I) \cdot \vec{1} + (M^5+M) \cdot \vec{v}_1$$

$$\vec{v}_6 = (M^3+I) \cdot (M+I) \cdot \vec{1} + M \cdot (M+I)^4 \cdot \vec{v}_1$$

... Compliqué ...